

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2x3

ستون ستون ستون

سطر سطر

ماتریس

آرایه‌ای عددی می‌باشد، که به صورت سطر و ستون بیان می‌شود.

تظم عددی

دترمینان ماتریس

خاصیتی برای ماتریس‌های مربعی بوده که در مورد ماتریس‌های 2×2 تعریف می‌شود و برای ماتریس با درجات بالاتر بسط داده می‌شود بدین گونه که هر عنصر از سطر یا ستونی که کاملاً دلخواه انتخاب می‌شود را که دارای ضریب $(-1)^{i+j}$ می‌باشد در دترمینان حاصل از حذف سطر و ستون عنصر ضرب کنیم. (i سطر عنصر و j ستون عنصر است).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \det A = |A| = ad - bc$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+2} \times b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times e \times \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times h \times \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

فرم علمی

توضیح علمی راجع به خیال ششم و باید توضیح خودمانی دترمینان 3×3 را یاد بگیریم:

۱- یک سطر یا یک ستون را کاملاً دلخواه انتخاب می‌کنیم.

۲- اگر سطر یا ستون انتخاب شده فرد باشد با علامت مثبت شروع می‌کنیم و اگر زوج باشد با علامت منفی شروع می‌کنیم و سپس یک دترمینان علامت‌ها را عوض می‌کنیم.

۳- هر عنصر را ناله داشته و آن را در دترمینان حاصل از حذف سطر و ستون خودش ضرب می‌کنیم.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = ?$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول}} \det A = +1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = +1(-6-8) - 5(18-16) + 2(6-(-4))$$

$$\det A = -14 - 10 + 20 \rightarrow \det A = -4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = ?$$

سَونِ دوُم $\rightarrow \det A = -5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$\det A = -5(18-16) + (-1)(6-8) - 2(4-6)$$

$$\det A = -10 + 2 + 4 \rightarrow \boxed{\det A = -4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 121 & 11 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = ?$$

بهترین انتخاب سطر یا ستون برای محاسبه دترمینان

۱- انتخاب سطر یا ستونی که شامل صفر باشد.

۲- انتخاب سطر یا ستونی که اعداد بدقیقه‌تری داشته باشد.

۱) 36

۲) 48

۳) -36

۴) -48

سَونِ لول $\rightarrow \det A = +121 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 49 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 25 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$

$$\det A = +121(7-5) - 49(11-5) + 25(11-7)$$

$$\det A = 242 - 294 + 100 = \boxed{48}$$

★★ مقادیر ویژه ماتریس

برای به دست آوردن مقدار ویژه‌های ماتریس باید معادله مشخصه ماتریس را حل کرده و مقادیر λ را از آن به دست آوریم که همان مقدار ویژه‌های ماتریس است.

هر ماتریس $n \times n$ حتماً دارای n مقدار ویژه خواهد بود که مجموع این مقدار ویژه‌ها برابر با تریس ماتریس و حاصلضرب مقدار ویژه‌ها برابر با دترمینان ماتریس می‌باشد.

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

عناصر قطر اصلی باید منتهای λ شود: $A - \lambda I$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = \text{Tr} A$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n = \det A$$

۱- هر ماتریس $n \times n$ حتماً دارای n مقدار ویژه است.

۲- مجموع مقادیر ویژه حتماً برابر مجموع عناصر قطر اصلی است.

۳- ضرب مقادیر ویژه حتماً برابر دترمینان ماتریس است.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

قطر اصلی

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

قطر اصلی

حرفه یکی از موارد زیر در سوال مطرح شود، هدف سوال مقدار ویژه است
۱- صراحتاً سوال بگوید مقدار ویژه کدام است.

۲- در سوال گفته شود ماتریس $A - \lambda I$ عکس پذیر نیست.

۳- در سوال گفته شود که $A \times X = \lambda \times X$ باشد.

۴- در سوال از معادله مشخصه یا معادله معسر صحبت کند.

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقادیر λ تریس (اثر) $A - \lambda I$ وارون پذیر نیست؟ (I ماتریس واحد است) (دلتی ۱۴۰۰)

هدف سوال مقدار ویژه است ← ماتریس سوال 3×3 است ← حتماً ۱۲ در میان مقدار ویژه دارد.
گزینه‌ای درست است که مجموع اعداد معین شده در گزینه برابر با مجموع عناصر قطر اصلی یعنی $4+6+1=11$ باشد.

گزینه‌ها: (۱) ۲, ۳, ۵ (۲) ۱, ۴, ۳ (۳) ۲, ۴, ۵ (۴) ۳, ۴, ۵

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس ستونی X و عدد حقیقی λ در رابطه $AX = \lambda X$ صدق کند عدد λ ، کدام است؟ (ارشد ۹۶)

گزینه‌ها: (۱) ۵ و ۲ ← ۳ (درست) ✓
(۲) ۳ و ۲ ← ۱ غلط
(۳) ۵ و ۱ ← ۴ غلط
(۴) ۷ و ۴ ← ۳ (درست)

سوال مقدار ویژه را می‌خواهد ← ماتریس ارائه شده 2×2 است ← حتماً ۲ مقدار ویژه دارد.
گزینه‌ای درست است که مجموع اعداد آن گزینه برابر با مجموع عناصر قطر اصلی یعنی $2+1=3$ باشد.
گزینه‌ای درست است که ضرب اعداد آن گزینه برابر با دترمینان ماتریس باشد.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 2 - 12 = -10$$

درست ۱) $-2, 5 \xrightarrow{\times} -10$

غلط ۴) $-4, 7 \xrightarrow{\times} -28$

تکرار شد یا دلری 1404 با تعریف $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ اگر $A \cdot X = \lambda \cdot X$ باشد، مقادیر λ کدام است؟

3, 4, 5 (4)
12

5, 5, 6 (3)
16 غلط

2, 10, 10 (2) ✓
12

2, 4, 6 (1)
12

مجموع عناصر قطر اصلی $= 5 + 5 + 2 = 12$

طرز اول $\det A = +5(10-4) - 4(8-4) + 2(8-10) = 30 - 16 - 4 = 10$

1) 2, 4, 6 $\xrightarrow{x} 48$ غلط

2) 1, 10, 10 $\xrightarrow{x} 10$ درست

4) 3, 4, 5 $\xrightarrow{x} 60$ غلط

تابع معکوس

تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد که در این صورت تابع معکوس، تابعی خواهد بود که دامنه آن برد تابع اولیه و برد آن دامنه تابع اولیه باشد.

$y = f(x) \xrightarrow{\text{معکوس پذیر}} y = f^{-1}(x)$

معکوس $(b, a) \in \Leftrightarrow$ تابع $(a, b) \in$ مهم

$\text{if } (1, 4) \in f \Rightarrow (4, 1) \in f^{-1}$

ضابطه معکوس تابع $f(x) = 2 + x - 2\sqrt{1+x}$ به کدام صورت است؟ (دلری 99)

$2x - \sqrt{x}$ (4)

$2x + \sqrt{x}$ (3)

$x - 2\sqrt{x}$ (2)

$x + 2\sqrt{x}$ (1) ✓

$y = 2 + x - 2\sqrt{1+x} \xrightarrow{x=3} y = 2 + 3 - 2\sqrt{4} = 5 - 4 = 1$

عکس $(1, 3) \in \Rightarrow$ تابع $(3, 1) \in$

1) $y = x + 2\sqrt{x} \xrightarrow{(1, 3)} 3 = 1 + 2\sqrt{1} \rightarrow 3 = 1 + 2 \rightarrow 3 = 3$ درست

2) $y = x - 2\sqrt{x} \xrightarrow{(1, 3)} 3 = 1 - 2\sqrt{1} \rightarrow 3 = 1 - 2 \rightarrow 3 = -1$ غلط

3) $y = 2x + \sqrt{x} \xrightarrow{(1, 3)} 3 = 2 + \sqrt{1} \rightarrow 3 = 2 + 1 \rightarrow 3 = 3$ درست

4) $y = 2x - \sqrt{x} \xrightarrow{(1, 3)} 3 = 2 - \sqrt{1} \rightarrow 3 = 2 - 1 \rightarrow 3 = 1$ غلط

$y = 2 + x - 2\sqrt{1+x} \xrightarrow{x=8} y = 2 + 8 - 2\sqrt{9} \rightarrow y = 10 - 6 = 4$

عکس $(4, 8) \in \Rightarrow$ تابع $(8, 4) \in$

1) $y = x + 2\sqrt{x} \xrightarrow{(4, 8)} 8 = 4 + 2\sqrt{4} \rightarrow 8 = 4 + 4 \rightarrow 8 = 8$ درست

3) $y = 2x + \sqrt{x} \xrightarrow{(4, 8)} 8 = 8 + \sqrt{4} \rightarrow 8 = 8 + 2 \rightarrow 8 = 10$ غلط

ضابطه معکوس تابع $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ ، $x > 0$ به کدام صورت است؟ (ارشد 1401)

$x - \sqrt{x^2 - 1}$ (۴)

$x + \sqrt{x^2 - 1}$ (۳)

$x - \sqrt{x^2 + 1}$ (۲)

$x + \sqrt{x^2 + 1}$ (۱) ✓

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) : x > 0 \xrightarrow{x=2} y = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$(2, \frac{3}{4}) \in \text{ج.ع} \rightarrow (\frac{3}{4}, 2) \in \text{عکس}$

۱) $y = x + \sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{(\frac{3}{4}, 2)} 2 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 1} \rightarrow 2 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{25}{16}} \rightarrow 2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$
 $2 = \frac{8}{4} \rightarrow 2 = 2$ درست

۲) $y = x - \sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{(\frac{3}{4}, 2)} 2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \rightarrow 2 = -\frac{2}{4} \rightarrow 2 = -\frac{1}{2}$ غلط

۳) $y = x + \sqrt{x^2 - 1} \xrightarrow{(\frac{3}{4}, 2)} 2 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - 1} \rightarrow 2 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{-7}{16}}$ خطی غلط

۴) $y = x - \sqrt{x^2 - 1} \xrightarrow{(\frac{3}{4}, 2)} 2 = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{-7}{16}}$ خطی غلط

مثال: معکوس تابع $y = x + \sqrt{2x}$ کدام است؟ (ارشد دکتری ۱۴۰۴)

$x - 1 + \sqrt{2x + 1}$ (۴)

$x - 1 - \sqrt{2x + 1}$ (۳)

$x + 1 + \sqrt{2x + 1}$ (۲)

$x + 1 - \sqrt{2x + 1}$ (۱) ✓

$$y = x + \sqrt{2x} \xrightarrow{x=8} y = 8 + \sqrt{16} = 8 + 4 = 12$$

$(8, 12) \in \text{ج.ع} \Rightarrow (12, 8) \in \text{عکس}$

۱) $y = x + 1 - \sqrt{2x + 1} \xrightarrow{(12, 8)} 8 = 12 + 1 - \sqrt{25} \rightarrow 8 = 13 - 5 \rightarrow 8 = 8$ درست

۲) $y = x + 1 + \sqrt{2x + 1} \xrightarrow{(12, 8)} 8 = 13 + 5 \rightarrow 8 = 18$ غلط

۳) $y = x - 1 - \sqrt{2x + 1} \xrightarrow{(12, 8)} 8 = 12 - 1 - \sqrt{25} \rightarrow 8 = 11 - 5 \rightarrow 8 = 6$ غلط

۴) $y = x - 1 + \sqrt{2x + 1} \xrightarrow{(12, 8)} 8 = 11 + 5 \rightarrow 8 = 16$ غلط